Fonctions réelles et inégalités

Feuille accompagnatrice

1) Cogitos

Pré-chapitre

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Décrire géométriquement, puis sous forme d'intervalles, les ensembles
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \geq r\}.$$
2. Sachant que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$, par quoi peut-on majorer $|x-y|$?
3. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante, vérifiant $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$ qui ne soit pas surjective ?
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$, où $\lfloor u \rfloor$ est la partie entière. Que représente d_n ? Quelle est la limite de (d_n) ?
5. On connaît le graphe d'une fonction f. Quelles transformations géométriques permettent d'obtenir les graphes de $x \mapsto f(-x)$, de $x \mapsto -f(x)$, de $x \mapsto f(x+2)$?
6. Si f et g sont deux fonctions décroissantes, quel est le sens de variation de $g \circ f$?
7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des solutions des équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$.

Post-chapitre

1. Montrer que les irrationnels sont denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : *pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers $x - \sqrt{2}$, qu'en faire ?*
2. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + e^x = \pi$.
3. La fonction $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de Lambert est la réciproque de $u \mapsto ue^u$ sur $\mathbb{R}_+$. Justifier cette définition, puis résoudre $x2^x = 3$ et (★) $x + e^x = 1$ en termes de W.
4. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + \ln f(x) = x$.
5. Comparer les deux égalités $\sin(\arcsin x) = x$ et $\arcsin(\sin x) = x$. Sur quels ensembles sont-elles valables ?
6. Quel est le lien entre l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ et la concavité de $\ln$?
En appliquant cette inégalité à $1/x$, obtenir une minoration de $\ln x$.
7. $\tan(2x) =$? , $\tan(\frac{\pi}{4} - x) =$?
8. Quel est le plus petit réel C tel que, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq C\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$? Quand y a-t-il égalité ?

Lien vers des QCMS

2) Présentation du chapitre

On commence par l'étude de quelques propriétés de $\mathbb{R}$: valeur absolue, partie entière, approximations et densité de $\mathbb{Q}$.
On rappelle quelques notions en lien avec les fonctions réelles (graphe, composition, fonction réciproque), ainsi que les propriétés des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques).
On introduit et étudie quelques autres fonctions, en lien avec les précédentes : fonctions puissances, fonctions hyperboliques, fonctions trigonométriques réciproque.
Enfin, on illustre quelques méthodes en lien avec des inégalités : étude de fonction, Cauchy–Schwarz, et convexité.

3) Résultats, démonstrations et méthodes importantes

- Caractérisation de $\lfloor x \rfloor$.
- Caractérisations de la densité, démonstration de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Valeur absolue : inégalités triangulaires, démonstration de la seconde à partir de la première.
- Dérivée d'une composée.
- Théorèmes de la bijection continue et dérivable ; formule de la dérivée d'une réciproque.
- $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$: connaître les ensembles de définition/d'arrivée, et les dérivées. Démontrer l'expression des dérivées.
- Inégalités $e^x \geq 1 + x$, $\ln x \leq x - 1$ et $|\sin x| \leq |x|$
- Convexité : critère par f'', position par rapport aux tangentes et aux cordes, inégalité de convexité. Savoir en déduire l'inégalité arithmético-géométrique.
- Inégalité de Cauchy–Schwarz : énoncé précis, démonstration et cas d'égalité.

4) Correction des cogitos

Pré-chapitre

1. Ce sont respectivement le segment $[a-r, a+r]$ et la réunion $]-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty[$: $|x-a|$ est la distance de x à a.
2. $|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |y|$.
3. Oui : $f(x) = x$ si $x < 0$, et $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$. Elle est strictement croissante, a les limites demandées, mais ne prend aucune valeur dans $[0, 1[$.
4. d_n est l'approximation décimale par défaut de x à n chiffres après la virgule. On a $0 \leq x - d_n < 10^{-n}$, donc $d_n \to x$.
5. Respectivement : symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, symétrie par rapport à l'axe des abscisses, translation de vecteur $(-2, 0)$.
6. $g \circ f$ est croissante : si $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$, puis $g(f(x)) \leq g(f(y))$.
7. Pour le cosinus : $\{a + 2k\pi,\ -a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pour le sinus : $\{a + 2k\pi,\ \pi - a + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Post-chapitre

1. Par densité de $\mathbb{Q}$, choisir $q_n \in \mathbb{Q}$ tels que $q_n \to x - \sqrt{2}$. Alors $\sqrt{2} + q_n \to x$ et chacun de ces nombres est irrationnel : sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel.
2. $h\colon x \mapsto x + e^x$ est continue, de dérivée $1 + e^x > 0$, et ses limites aux deux infinis sont $-\infty$ et $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; π a un unique antécédent.
3. $u \mapsto ue^u$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, vaut 0 en 0 et tend vers $+\infty$. On a l'équivalence $x2^x = 3 \Leftrightarrow xe^{x\ln 2} = 3 \Leftrightarrow x\ln 2 e^{x\ln 2} = 3\ln 2 \Leftrightarrow x\ln 2 = W(3\ln 2) \Leftrightarrow x = \frac{W(3\ln 2)}{\ln 2}$.
   De même, $x + e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 - x \Leftrightarrow 1 = (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow e = (1-x)e^{1-x} \Leftrightarrow 1 - x = W(e) \Leftrightarrow x = 1 - W(e)$
4. $g\colon u \mapsto u + \ln u$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $1 + 1/u > 0$, et ses limites en 0^+ et $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$. Elle réalise une bijection sur $\mathbb{R}$. L'unique fonction cherchée est $f = g^{-1}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
5. La première égalité vaut pour tout $x \in [-1, 1]$. La seconde vaut exactement pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; ailleurs, l'arcsinus ramène la valeur dans cet intervalle.
6. La fonction $\ln$, concave, est sous sa tangente en 1, d'où $\ln x \leq x - 1$. Appliquée à $1/x$, cette inégalité donne $\ln x \geq 1 - 1/x$.
7. $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ et $\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{\tan x}$ (la transformation $x \mapsto \frac{\pi}{4} - x$ échange les graphes de $\sin$ et $\cos$)
8. Cauchy–Schwarz appliquée à (x_k) et (1) donne $C = \sqrt{n}$. L'égalité a lieu si et seulement si tous les x_k sont égaux. Le choix $x_1 = \cdots = x_n = 1$ montre que C ne peut être diminué (pour $n \geq 1$).

5) Perspectives historiques et culturelles



Augustin-Louis Cauchy (*1789 – 1857*), français.

Il contribue aux fondements rigoureux de l'analyse (en particulier l'étude de la convergence de séries), et introduit les fonctions complexes « holomorphes ». Il publie la version discrète de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.



Hermann Schwarz (*1843 – 1921*), allemand.

Il étudie les fonctions holomorphes introduites par Cauchy, des équations aux dérivées partielles et des surfaces minimales. Il modernise le point de vue sur la version intégrale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La fonction exponentielle

Le concept de logarithme est découvert par John Napier au début du XVIIe siècle. Il s'agit essentiellement d'un logarithme en base 10 : on associe $T(10^p) = p$, et on complète la table de sorte que $T(ab) = T(a) + T(b)$ (exemple : $T(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}$).

Ces tables de logarithmes permettent de calculer des produits : pour calculer $a \times b$, lire leurs logarithmes, en faire la somme (ce qui est plus simple qu'un produit), et utiliser les tables dans le sens inverse pour trouver $a \times b$.

La fonction exponentielle émerge un peu plus tard, après que les concepts de fonction et de fonction dérivée soient développés.

Son caractère universel

Équations différentielles : Il est remarquable que l'existence d'une fonction vérifiant $f' = f$ permet de ramener la résolution de toute équation différentielle linéaire, de la forme $\forall x,\ y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ à des calculs de primitives.

On peut donner une expression explicite de l'unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-\int_{t}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t$$

Expression comme série : À l'époque, les mathématiciens s'intéressent à des sommes infinies sans se préoccuper de leur existence.

On peut remarquer que si on dérive l'expression formelle $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

A posteriori, on a en fait la relation suivante $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Extension aux complexes, aux matrices : L'expression précédente permet d'étendre l'exponentielle à $\mathbb{C}$ et aux matrices

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

Cette expression algébrique permet de démontrer la propriété de morphisme :

$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ e^{a+b} = e^a e^b \quad \text{et} \quad \forall N, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ e^{N+M} = e^N e^M \text{ si } N, M \text{ commutent.}$$

Extension aux opérateurs : Notons D l'opérateur de dérivation, de sorte que $D(f) = f'$, et D^n la composée n-ème de D, c'est-à-dire $D^n(f) = f^{(n)}$. On peut alors imaginer considérer e^D :

$$e^D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} \quad \text{c-à-d} \quad (e^D)(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

Surprise : pour certaines fonctions, on a $(e^D)(f) = x \mapsto f(x+1)$: l'exponentielle de la dérivation, c'est la translation de f par 1.